



ÉPREUVE JUNIOR

---

Les problèmes *ne* sont *pas* classés par ordre de difficulté

**Problème 1**

Trouver le plus grand entier  $k$  possédant la propriété suivante : quels que soient les réels  $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$  tels que

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = \dots = (x_1 + x_2 + \dots + x_{2024})^2,$$

il en existe au moins  $k$  qui sont tous égaux.

**Problème 2**

Étant donnés  $n \geq 2$  points sur un cercle, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un pion est placé sur l'un de ces points et aucun segment n'est tracé.

Les joueurs jouent chacun à leur tour, en commençant par Alice. Chaque joueur, lorsque c'est à son tour de jouer, déplace le pion du point sur lequel il se trouve, disons  $P$ , vers un des  $n - 1$  autres points, disons  $Q$ , puis trace le segment  $[PQ]$ . Ce déplacement n'est toutefois autorisé que si le segment  $[PQ]$  n'avait pas déjà été tracé auparavant. Le premier joueur qui ne peut plus déplacer le pion perd la partie, et son adversaire gagne.

Déterminer, pour chaque  $n$ , lequel des deux joueurs peut s'assurer de gagner quels que soient les choix de son adversaire.

**Problème 3**

Soit  $ABC$  un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que  $AB < AC$ , et soit  $O$  le centre de son cercle circonscrit. Soit  $D$  le point de  $[AC]$  tel que  $AB = AD$ . On note  $E$  le point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec la perpendiculaire à  $(AO)$  passant par  $D$ . Soit  $F$  le point d'intersection de la droite perpendiculaire à  $(OC)$  passant par  $C$  et de la droite parallèle à  $(AC)$  passant par  $E$ . Enfin, le point d'intersection des droites  $(CE)$  et  $(DF)$  est noté  $G$ . Prouver que  $(AG)$  et  $(BF)$  sont parallèles.

**Problème 4**

Trouver tous les entiers  $n \geq 2$  pour lesquels il existe  $n$  entiers  $a_1, a_2, \dots, a_n$  supérieurs ou égaux à 2 et tels que, pour tous les indices  $i$  et  $j$  distincts l'un de l'autre, l'entier  $a_i$  divise  $a_j^2 + 1$ .

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes

Chaque problème est noté sur 7 points